Cálculo Numérico I

Curso 2015-2016 Lista 3A 1^{o} de Mat./D.G.

Parcial del 27 de Noviembre de 2009:

1) Sean A, M, N matrices cuadradas tales que M es no singular y $A = M - N$. Para resolver el sistema lineal $Ax = b$, se utiliza el método iterativo

$$Mx_{n+1} = \big((1-\omega)M + \omega N\big)x_n + \omega b,$$

donde $\omega \neq 0$ es un parámetro real.

a) Demostrar que si el método iterativo converge lo hace a una solución de $Ax = b$. ¿Cuál es la matriz R_ω cuyo radio espectral gobierna la convergencia o no del citado método?

b)

i) Existe una relación lineal entre los autovalores de R_ω y de $M^{-1}N$. Encontrarla.

ii) Suponiendo que el método converge para $\omega = 1$, demostrar que converge también para cualquier $\omega \in (0, \beta)$, donde β es un número mayor que 1 (que puede depender de M y N).

c) Demostrar que el método converge para $\omega = 1$ si se eligen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad , \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

d) Sean A, M, N las mismas matrices que en el apartado anterior. Determinar los valores de ω para los que el método converge. ¿Cuál es en este caso el valor óptimo de ω en el sentido de la velocidad de convergencia?

Final del 21 de enero de 2010:

2) Se considera la ecuación (*) $x = -a\log(x)$, donde a es un parametro positivo.

a) Demostrar que para cualquier $a > 0$, esta ecuación tiene una única solución real.

b) Demostrar que el método del punto fijo, aplicado a la función $g(x) = -a\log(x)$, converge para $a < 1/e$, y diverge para $a > 1/e$.

c) Si se escoge $a = 1/10$, ¿para qué valores del dato inicial x_0 puede estar uno seguro de que el metodo converge?

d) Calcular la solución de la ecuación (*) para $a = 9/25$ con 4 dígitos signicativos, eligiendo un método adecuado.

3) Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4\lambda - 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, donde λ es un parámetro real.

a) Intentamos aplicar el metodo iterativo de Gauss-Seidel para resolver el sistema $Ax = b$, donde $b \in \mathbb{R}^3$. Calcular los autovalores y el radio espectral de la matriz de la que depende la convergencia del metodo (en función de λ). ¿Para qué valores de λ converge este método?

b) Estudiar la convergencia del metodo iterativo de Jacobi en el caso cuando $\lambda = 1/4$.